

Exercice [E3A PC 2022]

1.1. Notons $g: t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continue sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. De plus, $\frac{\sin t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$ donc $g(t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1^2 = 1$.

Ainsi g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

1.2. g est continue sur $[1, +\infty[$.

$$\forall t \geq 1, 0 \leq g(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de référence intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison de fonctions positives, g est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en particulier $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$ converge.

1.3. g est continue sur $]0, +\infty[$.

D'après 1.1, g est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable sur $[0, 1]$. D'après 1.2., g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Par conséquent, g est intégrable sur $]0, +\infty[$

1.4. • Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit d'une constante par une fonction usuelle (exp).

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $\left|\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt}\right| \underset{\substack{\uparrow \\ \cos xt \geq 0}}{\leq} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = g(t),$

avec g qui ne dépend pas de x et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 1.3.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on

en déduit que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.1.1. La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée la fonction $\cos$.

On $\forall t \geq 0, |\cos t| \leq 1$.

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

pour tout $t \geq 0$, $|\sin t - \sin 0| \leq 1 \times |t - 0|$, ie $\boxed{|\sin t| \leq |t| = t}$ ^{car $t \geq 0$}

2.1.2. Soit $t \geq 0$.

D'après la question précédente, $(\sin t)^2 \leq t^2$ donc $0 \leq \frac{\sin^2 t}{t} \leq t$.

De plus, comme $x \geq a$, on a $0 \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$.

Par produit, il vient $\boxed{0 \leq \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} \leq t e^{-at}}$.

2.1.3. Soit $t \geq 0$.

Comme $|\sin t| \leq 1$, on a $0 \leq \sin^2 t e^{-xt} \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$
 $\downarrow$
car $a \leq x$

2.2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, ie $0 < a \leq b$.

Pour $t \in]0, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, notons $h(x, t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt}$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit d'une constante et d'une fonction usuelle (exp).

De plus, $\forall x > 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 (-t) e^{-xt} = -\frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt}$

$$\text{et } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{\sin^2 t}{t} (-t) e^{-xt} = \sin^2(t) e^{-xt}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, ~~$t \mapsto h(x, t)$~~ , ~~$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$~~ $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ par 1.4.

$$\bullet \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -\frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} \right| \stackrel{2.1.1}{\leq} \frac{t^2}{t} e^{-xt} = t e^{-xt}$$

Or $t e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $t e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

par croissances comparées donc par comparaison,

$t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \stackrel{2.13.}{\leq} e^{-at} = \varphi(t)$.

φ est indépendante de x et intégrable sur $]0, +\infty[$ comme fonction de référence, car $a > 0$.

Ainsi, par théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-xt} dt$.

3.1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

$$|e^{(i\theta-x)t}| = |e^{i\theta t} e^{-xt}| = |e^{i\theta t}| \times |e^{-xt}| = \boxed{x e^{-xt}} \quad \text{car } \theta t \in \mathbb{R} \text{ et } e^{-xt} \geq 0.$$

3.2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $x > 0$.

D'après 3.1, $0 \leq |e^{(i\theta-x)t}| \leq e^{-xt}$.

On $e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ car $x > 0$, d'où par encadrement $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{(i\theta-x)t}| = 0}$.

3.3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{ on a } \sin^2 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2it} - 2 + e^{-2it}}{-4} = \frac{-1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it}.$$

Soit $X \in]0, +\infty[$. On a alors

$$\int_0^X \sin^2(t) e^{-xt} dt = \int_0^X \left(\frac{-1}{4} e^{2it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2it} \right) e^{-xt} dt$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{=} \frac{-1}{4} \int_0^X e^{(2i-x)t} dt + \frac{1}{2} \int_0^X e^{-xt} dt - \frac{1}{4} \int_0^X e^{(-2i-x)t} dt$$

$$= \frac{-1}{4} \left[\frac{e^{(2i-x)t}}{2i-x} \right]_0^X + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^X - \frac{1}{4} \left[\frac{e^{(-2i-x)t}}{-2i-x} \right]_0^X$$

$$= \frac{-1}{4} \times \frac{e^{(2i-x)X} - 1}{2i-x} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{-xX} - 1}{-x} - \frac{1}{4} \times \frac{e^{(-2i-x)X} - 1}{-2i-x}$$

$$\stackrel{\text{Q3.2.}}{X \rightarrow +\infty} \rightarrow \frac{1}{4(2i-x)} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4(-2i-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \times \frac{-2i-x+2i-x}{(2i-x)(-2i-x)}$$

$$= \frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \times \frac{-2x}{4+x^2}$$

$$\text{Finalement } f''(x) \stackrel{2.2}{=} \int_0^{+\infty} \sin^2(t) e^{-xt} dt \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin^2(t) e^{-xt} dt = \boxed{\frac{1}{2x} - \frac{x}{2(4+x^2)}}.$$

$$4.1. \forall x \geq 0, \forall t > 0, 0 \leq h(x,t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-xt} \stackrel{2.1.1}{\leq} e^{-xt}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient $0 \leq \int_0^{+\infty} h(x,t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$,
 i.e. $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par encadrement on obtient $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}.$

$$4.2. \text{ D'après 2.2, pour tout } x > 0, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-\sin^2 t}{t} e^{-xt} dt,$$

$$\text{d'où } 0 \leq |f'(x)| \stackrel{\substack{\text{in.} \\ \text{triangulaire}}}{\leq} \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} \right| dt \stackrel{2.1.1}{\leq} \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt. \quad (*)$$

• On $t \mapsto t e^{-xt}$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car $t e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On pose $\begin{cases} u = t \\ v' = e^{-xt} \end{cases} \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\frac{1}{x} e^{-xt} \end{cases}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$
 et $uv(t) = \frac{-t}{x} e^{-xt} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi, par intégrations par parties généralisées,

$$\int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \left[\frac{-t}{x} e^{-xt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \\ = 0 - 0 + \frac{1}{x} \left[\frac{e^{-xt}}{-x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x} \left(0 - \frac{-1}{x} \right) = \frac{1}{x^2}$$

Enfin, comme $\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par encadrement avec (*), on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0}.$

4.3. La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions usuelles.

$$\forall t \in \mathbb{R}, G'(t) = 1 \times \ln(t^2+4) + t \times \frac{2t}{t^2+4} - 2 + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+(\frac{t}{2})^2} \\ = \ln(t^2+4) + \underbrace{\frac{2t^2}{t^2+4} + \frac{-2t^2-8}{t^2+4} + \frac{8}{4+t^2}}_{=0} \\ = \boxed{\ln(t^2+4)}$$

4.4. • D'après 3.3, $\forall x > 0$, $f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(4+x^2)}$

En primitivant, on a : $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln|4+x^2| + c_1$
 avec $c_1 \in \mathbb{R}$.
 $= \frac{1}{4} \ln(x^2) - \frac{1}{4} \ln(4+x^2) + c_1$
 $= \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) + c_1$

On par 4.2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) = \frac{1}{4} \ln(1) = 0$ donc $\boxed{c_1 = 0}$.

• ~~Donc~~ Ainsi $\boxed{\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2+4)}$

En primitivant de nouveau, grâce à 4.3, on obtient :

$\forall x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2} (x \ln x - x) - \frac{1}{4} \left[x \ln(x^2+4) - 2x + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right] + c_2$
 avec $c_2 \in \mathbb{R}$.
 $= \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{4} x \ln(x^2+4) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_2$
 $= \frac{1}{4} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_2$

On $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{4.1}{=} 0$ et $\cancel{\frac{1}{4} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)} - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{-\pi}{2}$

et $\frac{1}{4} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = \frac{1}{4} x \ln\left(\frac{x^2+4}{x^2}\right) = \frac{1}{4} x \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4} x \times \frac{4}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

d'où $\boxed{c_2 = \frac{\pi}{2}}$

Finalement, $\boxed{\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{4} x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}}$

5. D'après 1.4, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$.

D'autre part, $\arctan\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right) = x \ln(x^2) - x \ln(x^2+4)$
 $= 2x \ln x - x \ln(x^2+4)$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 0 \times \ln(4) = 0$
 ↑
 par coïncidences comparées.

D'où, par 4.4, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}}$.